INTEGRALSÄTZE

Die Punkte dienen nur Ihrer Information. Die Studienleistung wird am Ende der Vorlesungszeit durch einen schriftlichen Test erreicht. Diesen werden Sie allerdings höchstwahrscheinlich nur bestehen können, wenn Sie die Hausübungen auch tatsächlich bearbeiten.

[H6] *Stokesscher Integralsatz* **[12 Punkte]**

Ein Magnetfeld sei durch $\vec{B} \doteq \beta \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ gegeben. Der Fluss der Stromdichte $\frac{4\pi}{c}\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ durch eine Fläche Φ soll einmal direkt, d.h. als Flächenintegral, und einmal mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes berechnet werden. Dabei sei Φ ein kreisförmiges Stück einer Sattelfläche: $\vec{r}(u,v) \doteq (u, v, u^2 - v^2)^\top$ mit $u^2 + v^2 \leq R^2$.

[H7] *Homogen geladene Kugel* **[$4 + 4 + 4 = 12$ Punkte]**

Als Anwendung des Gaußschen Integralsatzes soll das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel im Ursprung mit Radius R und Gesamtladung Q berechnet werden. Der Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und der Ladungsdichte ϱ ist durch $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\,\varrho(\vec{r})$ gegeben.

(a) Integrieren Sie beide Seiten über eine Kugel im Ursprung mit Radius r. Das gewählte Integrationsvolumen trägt der Symmetrie des Problems Rechnung. Denken Sie an eine Fallunterscheidung für $r < R$ und $r > R$.

(b) Wandeln Sie das Volumenintegral über $\operatorname{div} \vec{E}$ gemäß dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral um. Aufgrund der Kugelsymmetrie ist der Ansatz $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\,\vec{e}_r$ vernünftig, mit dem sich das Oberflächenintegral einfach auswerten lässt.

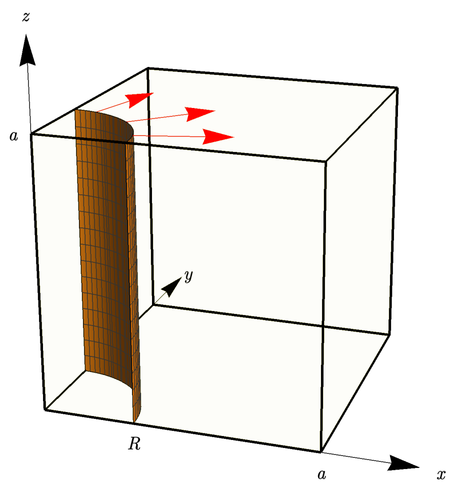
(c) Bestimmen Sie anhand der Fallunterscheidung $r < R$ und $r > R$ das elektrische Feld innerhalb und außerhalb der geladenen Kugel. Wie unterscheidet sich das Feld im Außenraum von demjenigen einer Punktladung Q im Ursprung?

[H8] *Gaußscher Integralsatz* **[12 Punkte]**

Der Gaußsche Integralsatz soll durch explizite Berechnung beider Seiten nachgeprüft werden am Beispiel des skizzierten Würfelvolumens V mit Kantenlänge a, in welchem das folgende elektrische Feld vorliegt:

$$\vec{E} = \vec{e}_\rho \, \frac{\alpha}{\rho} \, \theta(\rho - R) \quad \text{mit } R < a\,.$$

Anmerkung: Es handelt sich um das Feld eines Zylinderkondensators, dessen zweites, negativ geladenes Blech unendlich weit entfernt ist. Die Skizze deutet den inneren Zylinder sowie die Richtung des elektrischen Feldes an.



[!] *Ausführung* **[6 Punkte]**

Mit insgesamt 6 Punkten wird die Ausführung der Lösung insgesamt bewertet, also Leserlichkeit, Vollständigkeit der Rechenwege, Ausführlichkeit der Kommentare zum Lösungsweg usw.

[!] *Hinweise zu Computerübungen*

Die gesamte Lösung zusammen mit Erläuterungen und Diskussionen der Ergebnisse muss in einem *Mathematica*-Notebook verfasst werden. Sie haben für die Computerübung insgesamt 14 Tage Zeit.

Lesen Sie unbedingt noch einmal die allgemeinen Hinweise zu den Computerübungen durch, die Sie auf der Seite „Allgemeine Informationen" der Lehrveranstaltung im Stud.IP finden.

Beachten Sie, dass jeweils die Hälfte der maximal möglichen Punkte die Ausführung der Lösung der Computerübungen bewertet, also insbesondere, ob die Lösung gut strukturiert programmiert wurde, ob die Lösung eine vollständige Dokumentation im *Mathematica*-Notebook enthält, ob Plots vernünftig beschriftet sind, und ob Sie Ihre Resultate sinnvoll diskutieren und interpretieren.

[C1] *Iterative Lösung* **[$3 + 6 + 6 + 6 = 21$ Computerpunkte]**

Ein Teilchen der Masse m und Ladung q rast auf der x–Achse von links mit großer Geschwindigkeit v_0 auf einen Raumbereich zu, in dem das Magnetfeld $\vec{B} \doteq (0, 0, B)^\top$ herrscht. Der Eintritt erfolgt bei $\vec{r}(t = 0) \doteq (0, 0, 0)^\top$.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. Beachten Sie, dass in der Lorentz-Kraft ein Kreuzprodukt auftritt, so dass Sie für *Mathematica* alles tatsächlich drei-dimensional definieren müssen, auch wenn das eigentliche Problem effektiv nur zwei-dimensional ist. *Hinweis*: Der Sinn dieses Aufgabenteils ist, dass Sie die nötigen grundsätzlichen Definitionen in *Mathematica* hier vornehmen, und in den späteren Aufgabenteilen dann verwenden.

(b) Beginnen Sie mit $\vec{r}^{(0)}(t) \doteq (v_0\, t, 0, 0)^\top$ als nullter Näherung. Setzen Sie diese in die Lorentz-Kraft ein, und lösen damit die Bewegungsgleichung. Die Lösung ist Ihre erste Näherung $\vec{r}^{(1)}(t)$. Schreiben Sie eine Routine, die diese Iteration automatisiert und führen Sie damit insgesamt sechs Iterationen durch. *Hinweis*: Hierfür ist der Befehl `Nest` extrem nützlich.

(c) Geladene Teilchen beschreiben im homogenen Magnetfeld Kreisbahnen, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen werden, d.h., der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant. Finden Sie die exakte Lösung mit Hilfe von *Mathematica*, und lesen Sie daraus ab, welche Kreisfrequenz ω und welchen Radius R diese Kreisbahnen haben.

(d) Entwickeln Sie die exakte Lösung in Potenzen von B und vergleichen mit dem Iterationsresultat.